



ce
pre
UNI

Trigonometría

- ✓ **ÁNGULOS HORIZONTALES.**
- ✓ **CÁLCULO DE LOS SEMIÁNGULOS EN UN TRIÁNGULO.**

**CICLO
PRE
2024 - I**



ÁNGULOS HORIZONTALES

Introducción

Los ángulos horizontales son ampliamente usados en mediciones topográficas y en navegación.



Línea vertical

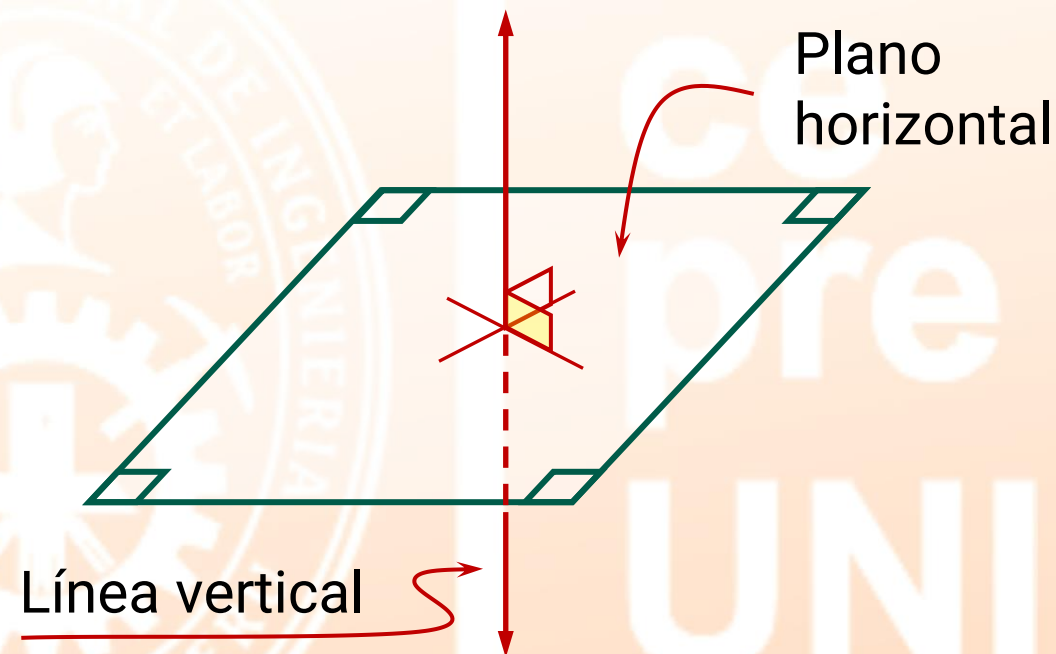
Es aquella línea que coincide con la trayectoria de un cuerpo al ser atraído al centro de la tierra o la línea que sigue la dirección de una plomada.



Línea vertical

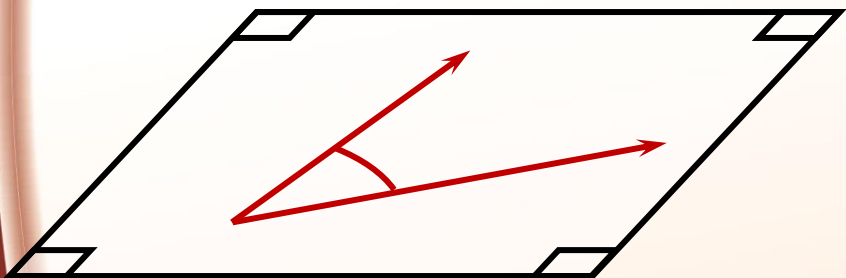
Plano horizontal

Se denomina así a todo plano perpendicular a la línea vertical.



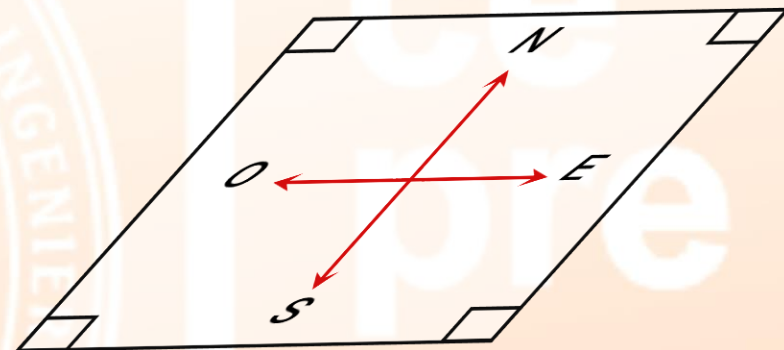
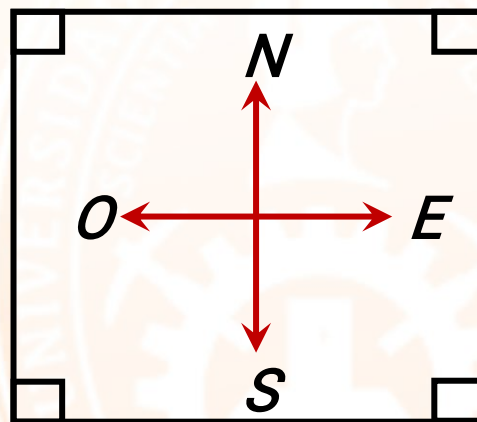
Ángulos horizontales

Se denomina así a aquellos ángulos contenidos en un plano horizontal.



Puntos cardinales

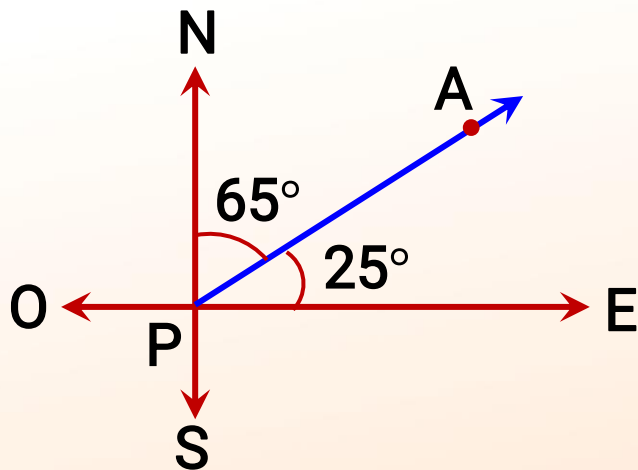
Son los cuatro sentidos que conforman un sistema de referencia para representar la orientación en mapas o en la propia superficie terrestre.



- ✓ El Este también es conocido como oriente.
- ✓ El Oeste también es conocido como occidente.

La dirección

La dirección de un punto respecto de un observador puede darse con respecto de alguno de los puntos cardinales más cercanos.

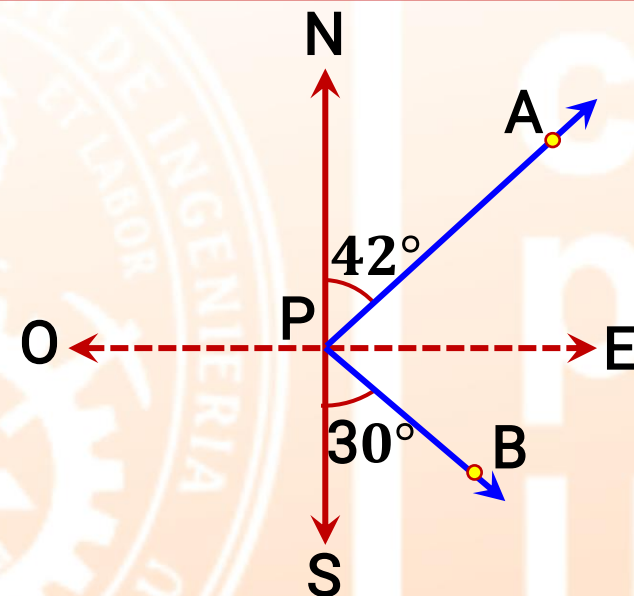


Dirección de A respecto de P : E25°N

Dirección de A respecto de P : N65°E

El rumbo

Es una dirección que se obtiene considerando el ángulo agudo entre la línea de dirección Norte-Sur y la línea de dirección hacia el objeto.



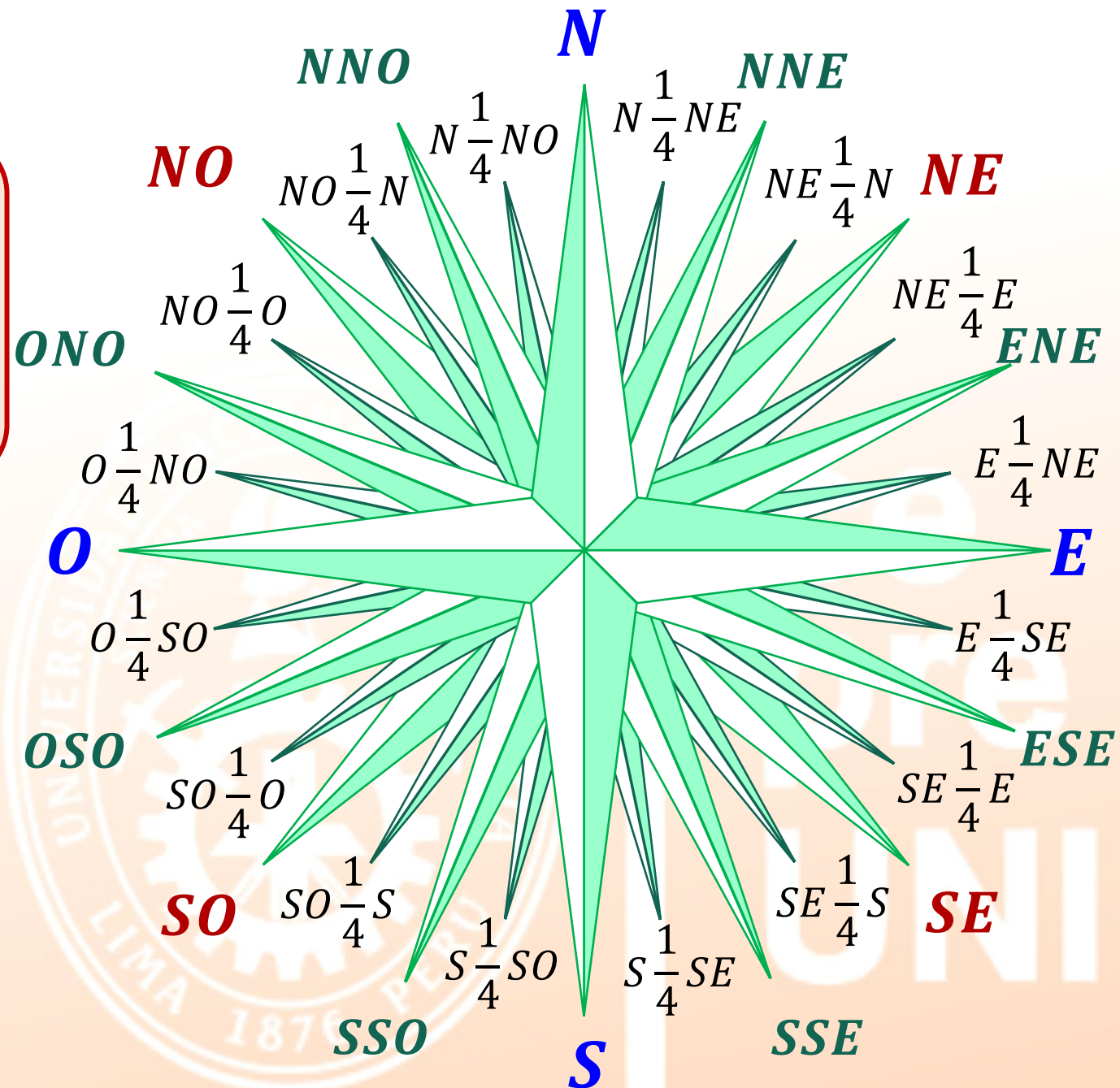
Rumbo de A respecto de P : N42°E

Rumbo de B respecto de P : S30°E

ROSA NÁUTICA

En la figura se observa 32 direcciones igualmente distanciados, de tal manera que la medida del ángulo determinado por dos direcciones consecutivas es $11^{\circ}15'$.

Nombre	Lectura	Rumbo
NE	Noreste	$N45^{\circ}E$
NNE	Norte noreste	$N22^{\circ}30'E$
$N\frac{1}{4}NE$	Norte $\frac{1}{4}$ al noreste	$N11^{\circ}15'E$
$NE\frac{1}{4}N$	Noreste $\frac{1}{4}$ al norte	$N33^{\circ}45'E$



PROBLEMA 01

Verónica divisa a Diego y Juan en las direcciones $N20^\circ O$ y $O10^\circ N$ a 15m y 10m de distancia respectivamente. Calcule la distancia entre Diego y Juan (en m).

A) $5\sqrt{7}$

B) $10\sqrt{7}$

C) $5\sqrt{17}$

D) $5\sqrt{34}$

E) $15\sqrt{3}$

CLAVE: A**PROBLEMA 02**

Una embarcación A se dirige en dirección NNE y B se dirige en dirección ESE. Si la embarcación A se dirige con la rapidez de 3 km/h y B se dirige con una rapidez de 9 km/h. Halle la distancia (en km) entre A y B después de 2 horas.

A) $\sqrt{10}$

B) $2\sqrt{10}$

C) $4\sqrt{10}$

D) $6\sqrt{10}$

E) $8\sqrt{10}$

CLAVE: D

PROBLEMA 03

Desde el punto Q se observa un barco A en la dirección SO; y un barco B en la dirección S15°E. En ese momento, B se observa desde A en la dirección S60°E. Halle la distancia (en km) entre A y B. sabiendo que la distancia del punto Q al barco A es 16km.

- | | |
|----------------|-----------------|
| A) $4\sqrt{6}$ | D) $4\sqrt{2}$ |
| B) $8\sqrt{6}$ | E) $12\sqrt{6}$ |
| C) $8\sqrt{3}$ | |

CLAVE: B**PROBLEMA 04**

Desde un puerto se observan 3 embarcaciones A, B y C ubicados en la dirección Norte-Sur, B equidistante de A y C. Si A se encuentra en la dirección N30°O del puerto y C se encuentra en la dirección S15°O del puerto. ¿En qué dirección se encuentra B respecto del puerto?

- | | |
|----------|----------|
| A) SO | D) S60°O |
| B) S75°O | E) O30°S |
| C) NO | |

CLAVE: A

PROBLEMA 05

Desde un puerto salen tres barcos en direcciones N θ E, S θ E, y O θ S, recorriendo distancias iguales a Lu , Lu y $2Lu$ respectivamente. De sus últimas ubicaciones, las dos primeras embarcaciones observan a la tercera en las direcciones O x S y O y N respectivamente, calcule

$$\frac{\text{sen}(x + y)}{\text{sen}(x - y)}$$

- A) $\tan(\theta)$ B) $\tan(\theta)$ C) $0,5 \cot(\theta)$ D) $2\cot(\theta)$ E) $\sec(\theta) \csc(\theta)$

CLAVE: C

PROBLEMA 06 (PC 06 CEPRE UNI 2022-1)

Para cercar un terreno triangular se posicionan sus vértices en los puntos A, B y C; de manera que B está al $N\alpha E$ de A, C está al $S\beta E$ de B y A está al $0\theta N$ de C. Si $AB = 8$ km, $BC = 9$ km y $AC = 10$ km, calcule $5\sec(\alpha + \beta)$.

A) 16

C) 15

B) 14

D) 17

CLAVE: A**PROBLEMA 07 (PC 05 CEPRE UNI 2016-2)**

Pedro se encuentra en la dirección Este con respecto a Pablo. Si Pablo se desplaza en la dirección $N1/4NE$ y Pedro, en la dirección NO , se encuentran en un punto A, calcule la medida del menor ángulo que forman estas direcciones.

A) $123^{\circ}45'$ B) $67^{\circ}30'$ C) $56^{\circ}15'$ D) $78^{\circ}45'$ E) $53^{\circ}30'$ **CLAVE: C**

PROBLEMA 08

Desde un punto P en tierra se divisan un árbol y un poste en direcciones Norte y $N60^\circ E$, con sus respectivas alturas de 20m y 10m, asimismo la parte baja de ambos se encuentra a $10\sqrt{3}$ m del punto P. Calcule la distancia (en m) entre los puntos más elevados del árbol y del poste

- A) $5\sqrt{3}$ D) 20
B) 10 E) 30
C) $10\sqrt{3}$

CLAVE: D**PROBLEMA 09**

Desde lo alto de un edificio, se observa 2 autos en las direcciones $S70^\circ O$ y $S80^\circ E$ con ángulos de depresión de 30° y 45° respectivamente. Calcule la altura (en m) del edificio, si la distancia que separa a dichos autos es $15\sqrt{7}$ m.

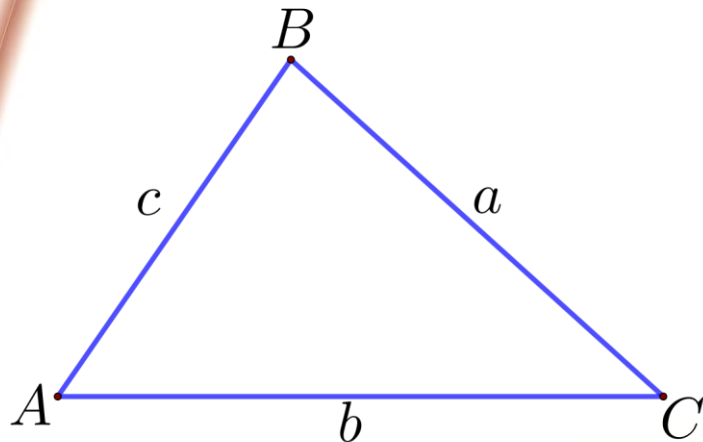
- A) 12 D) 18
B) 14 E) 20
C) 15

CLAVE: C



RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS SEMIÁNGULOS

1) SENO



2p: perímetro

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

$$\text{sen} \left(\frac{A}{2} \right) = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}}$$

$$\text{sen} \left(\frac{B}{2} \right) = \sqrt{\frac{(p - a)(p - c)}{ac}}$$

$$\text{sen} \left(\frac{C}{2} \right) = \sqrt{\frac{(p - a)(p - b)}{ab}}$$

Demostración:

Del teorema de cosenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos(A)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \left[1 - 2\text{sen}^2 \left(\frac{A}{2} \right) \right]$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc + 4bc\text{sen}^2 \left(\frac{A}{2} \right)$$

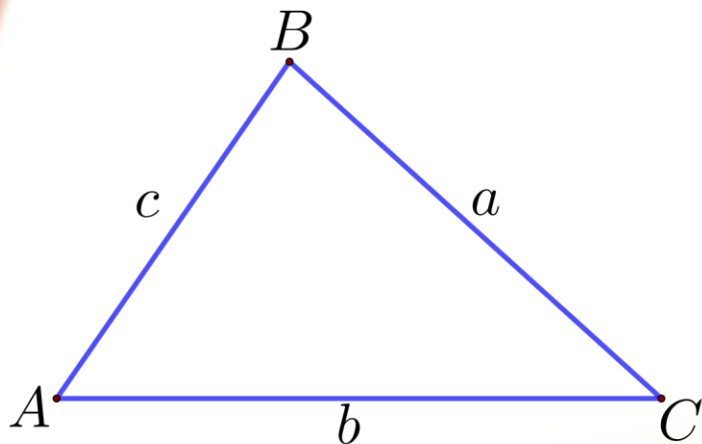
$$a^2 - (b - c)^2 = 4bc\text{sen}^2 \left(\frac{A}{2} \right)$$

$$\frac{(a + b - c)(a - b + c)}{4bc} = \text{sen}^2 \left(\frac{A}{2} \right)$$

$$\frac{(2p - 2c)(2p - 2b)}{4bc} = \text{sen}^2 \left(\frac{A}{2} \right)$$

$$\therefore \text{sen} \left(\frac{A}{2} \right) = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{bc}}$$

2) COSENO



2p: perímetro

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

$$\cos\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\cos\left(\frac{B}{2}\right) = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}$$

$$\cos\left(\frac{C}{2}\right) = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

Demostración:

Del teorema de cosenos:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos(A)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \left[2\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) - 1 \right]$$

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2bc - 4bccos^2\left(\frac{A}{2}\right)$$

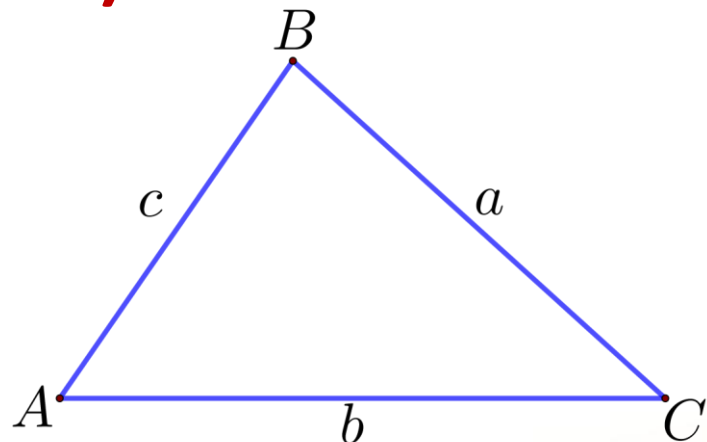
$$4bccos^2\left(\frac{A}{2}\right) = (b + c)^2 - a^2$$

$$\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{(a + b + c)(b + c - a)}{4bc}$$

$$\cos^2\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{(2p)(2p - 2a)}{4bc}$$

$$\therefore \cos\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

3) TANGENTE



p : semiperímetro

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\tan\left(\frac{B}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\tan\left(\frac{C}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

Demostración:

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\cos\left(\frac{A}{2}\right)}$$

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{\cancel{bc}}}}{\sqrt{\frac{p(p-a)}{\cancel{bc}}}}$$

$$\therefore \tan\left(\frac{A}{2}\right) = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

PROBLEMA 10

En un triángulo ABC de lados $BC = a u$, $AC = b u$, $AB = c u$ y semiperímetro $p u$, se cumple

$$\sin\left(\frac{C}{2}\right) = \sqrt{\frac{p(p-b)}{3ab}}$$

Luego, podemos afirmar que

- | | |
|-----------------|---------------------------|
| A) $a + b = 2c$ | D) $b + c = \frac{4}{3}a$ |
| B) $a + c = 2b$ | E) $a + c = \frac{4}{3}b$ |
| C) $b + c = 2a$ | |

CLAVE: C

PROBLEMA 11

En un triángulo ABC de lados $BC = a u$, $AC = b u$, $AB = c u$ y semiperímetro $p u$, se cumple

$$\sin\left(\frac{B}{2}\right) \sin\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{1}{3} \left(\frac{p-a}{a}\right)$$

Calcule la medida del ángulo BAC

- | | |
|---------------------|---------------------|
| A) $\cos^{-1}(2/9)$ | D) $\cos^{-1}(2/3)$ |
| B) $\cos^{-1}(1/3)$ | E) $\cos^{-1}(7/9)$ |
| C) $\cos^{-1}(4/9)$ | |

CLAVE: E

PROBLEMA 12:

En un triángulo ABC de lados $BC = a u$, $AC = b u$, $AB = c u$. Se cumple:

$$\operatorname{sen}\left(90^\circ - \frac{B}{2}\right) \operatorname{sen}\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) = 7 \cos\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right). \text{ Calcule el valor de: } \frac{b+c}{a}$$

A) 7

B) 9

C) 11

D) 13

E) 15

CLAVE: D

PROBLEMA 13

En un triángulo ABC, de lados $BC = a u$, $AC = b u$, $AB = c u$ y semiperímetro $p u$, se verifica que $(ab + c)^2 - (ab - c)^2 = 64(p - a)(p - b)(p - c)$, calcule el valor de

$$\operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right)$$

A) 1/64

B) 1/32

C) 1/16

D) 1/8

E) 1/4

CLAVE: C

PROBLEMA 14

Los lados de un triángulo ABC miden $BC = 39 u$, $AC = 40 u$ y $AB = 25 u$, calcule el valor de

$$\cos\left(\frac{B}{2}\right) + \tan\left(\frac{C}{2}\right)$$

A) $3/5$

B) $13/15$

C) $17/15$

D) $7/5$

E) $9/5$
CLAVE: C

PROBLEMA 15

En un triángulo ABC de lados $BC = a u$, $AC = b u$, $AB = c u$, calcule el valor de

$$\tan\left(\frac{A}{2}\right) \tan\left(\frac{B}{2}\right) + \frac{2c}{a + b + c}$$

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

CLAVE: A

PROBLEMA 16

En un triángulo ABC de lados $BC = a u$, $AC = b u$, $AB = c u$, los ángulos x, y, z están determinados por las relaciones:

$$\cos(x) = \frac{a}{b+c}, \cos(y) = \frac{b}{a+c} \text{ y } \cos(z) = \frac{c}{a+b}$$

Calcule el valor de
$$\frac{\tan\left(\frac{A}{2}\right) \tan\left(\frac{B}{2}\right) \tan\left(\frac{C}{2}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2}\right) \tan\left(\frac{y}{2}\right) \tan\left(\frac{z}{2}\right)}$$

A) $\frac{1}{3}$

B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C) 1

D) $\sqrt{3}$

E) 3

CLAVE: C